FICHE RECAPITULATIVE VARIABLES ALEATOIRES

1) Loi de probabilité

La *loi de probabilité* de la variable aléatoire X donne la probabilité de réalisation de chacun des évènements $(X = x_i)$, c'est-à-dire

$$\text{Pour tout } x_i \in X(\Omega),\ f(x_i) = P(X = x_i). \tag{1}$$

Pour toute variable aléatoire discrète X,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1. \tag{2}$$

2) Espérance, variance et écart-type

L'*espérance mathématique* de la variable aléatoire X est définie par

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i). \tag{3}$$

$E(X)$ est donc la *moyenne pondérée* des valeurs x_i de X, les poids étant les $f(x_i) = P(X = x_i)$.

La *variance* de la variable aléatoire X est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i). \tag{4}$$

L'*écart-type* σ de X est défini par

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}. \tag{5}$$

L'écart-type est une *mesure de dispersion* (comme la variance). Il mesure l'écart des valeurs de X par rapport à sa valeur moyenne $\mu = E(X)$. L'écart-type s'exprime dans la même unité que X : par exemple, si X s'exprime en mètres, il en est de même pour σ.

La variance se calcule pratiquement à partir de la formule

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{6}$$

3) Loi binomiale

Considérons une suite de n épreuves $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, ..., \mathcal{E}_n$ identiques, *mutuellement indépendantes*, qui donnent lieu à la réalisation (ou non) d'un événement A de probabilité $p(A) = p$. Par définition, la variable aléatoire X qui compte le *nombre de réalisations* de A obéit à la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n et p. On a donc

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, ..., n\}. \tag{7}$$

Soit $X \hookrightarrow B(n, p)$. On pose $q = 1 - p$. Alors la *loi de probabilité* de X est donnée par

$$P(X = k) = \binom{n}{p} p^k q^{n-k} \text{ pour tout } k \in \{0, 1, 2, ..., n\}. \tag{8}$$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Alors l'*espérance* et la *variance* de X sont données par

$$E(X) = np \text{ et } \mathrm{Var}(X) = npq. \tag{9}$$